Été 2020

On s'efforcera de ré
et notamment d'apporter le

Exercice 1

1. On s'intéresse à la proposition (*autrement dit à l'affirmation mathématique*) suivante :
« Pour qu'un réel soit racine du polynôme $3x^2 - 7x - 10$, il faut qu'il soit égal à -1. »

a. Reformuler cela en recopiant et en complétant ce qui suit (*ne pas se fier aux dimensions des espaces*) :
« Soit x un réel quelconque. On a l'implication : .... = ... entraîne .... = ... »

b. Est-elle vraie ?

c. Justifier votre réponse.

2. On considère maintenant la proposition :
« Pour qu'un réel soit racine du polynôme $3x^2 - 7x - 10$, il suffit qu'il vaille -1. »

a. Est-elle vraie ? (Justifier)

b. Reformuler (cette proposition) sur le modèle de 1.a.

3. a. Reformuler la proposition suivante sur le modèle de 1.a.
« Soit α un réel quelconque. Si α est racine du polynôme $3x^2 - 7x - 10$, alors on a $\alpha = -1$. »

b. Est-ce vrai ? (Justifier)

4. a. Reformuler la proposition ci-dessous sur le modèle de 1.a.
« Pour qu'un réel soit solution de l'équation $-3x^2 - 2x + 4 = 0$, il faut qu'il soit strictement plus grand que 1024 ou qu'il appartienne à l'intervalle $\left[-\frac{1+\sqrt{13}}{3}, \frac{-1+\sqrt{13}}{3}\right]$. »

b. Est-elle vraie ? (Justifier)

5. On considère la proposition

« Soit a un nombre réel quelconque. Le polynôme $ax^2 + 2x - 1$ possède une unique racine réelle si et seulement si $a = -1$. »

Remarques.

- Cette proposition a le même sens que la proposition suivante :
« Soit a un nombre réel quelconque. Dire que le polynôme $ax^2 + 2x - 1$ possède une unique racine réelle revient à dire que $a = -1$. »

- La signification est également la même que lorsque l'on écrit :

« Soit a un nombre réel quelconque. Nous avons :

$$\begin{cases} \bullet \text{ si le polynôme } ax^2+2x-1 \text{ possède une unique racine réelle, alors } a=-1, \\ \text{et} \\ \bullet \text{ si } a=-1, \text{ alors le polynôme } ax^2+2x-1 \text{ possède une unique racine réelle. »} \end{cases}.$$

La proposition en question est-elle vraie ? (Justifier)

Exercice 2 On rappelle que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs (*c'est-à-dire l'ensemble des entiers positifs, négatifs ou nuls*), et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Préciser, pour chacune des lignes suivantes, par quel ensemble, parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$, on peut compléter les points de suspension de façon à obtenir une affirmation juste. **Justifier**.

1. Soit x un élément de $\cdots$. Si x est supérieur ou égal à 3, alors x est strictement supérieur à 2.

2. Soit x un élément de $\cdots$. Si x est strictement supérieur à 2, alors x est supérieur ou égal à 3.

3. Soit x un élément de $\cdots$. Si x est supérieur ou égal à 3, alors x^2 est supérieur ou égal à 9.

4. Soit x un élément de $\cdots$. Si x^2 est supérieur ou égal à 9, alors x est supérieur ou égal à 3.

5. Soient x et y des éléments de $\cdots$. Si $x+y=0$, alors $x=y=0$.

Exercice 3 Calculer et donner le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

1. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}$ 2. $\dfrac{3}{7}-3$ 3. $\dfrac{-3/8}{9/4}$ 4. $4\Big(\dfrac{5}{6}-\dfrac{6}{5}\Big)$ 5. $\dfrac{5}{5/11}$

6. $\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)\Big(-\dfrac{2}{3}\Big)\Big(-\dfrac{3}{4}\Big)\Big(-\dfrac{4}{5}\Big)$ 7. $\dfrac{2-\dfrac{1}{3}}{2+\dfrac{1}{3}}$ 8. $\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{7}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{7}+\dfrac{1}{6}}$ 9. $\dfrac{5\times\Big(2-\dfrac{19}{3}\Big)}{(\frac{11}{6})/(\frac{5}{2})}.$

Exercice 4 *Justifier soigneusement chacune de vos réponses.*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. On suppose $u_0=0,333$ et $u_1=\dfrac{1}{3}$.

a. Peut-on affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ?

b. Peut-on affirmer qu'elle n'est pas décroissante ?

2. On suppose maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Peut-on affirmer que l'on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n=+\infty$?

3. On suppose enfin $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n=+\infty$.
Peut-on affirmer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ?

Exercice 5 Soient x, y et z trois nombres réels quelconques.

1. Développer :

a. $(x-3)^2$

b. $(3x+5y)^2$

c. $(2x-y+3z)^2$

d. $(3x+2)^3$.

2. Réduire au même dénominateur :

a. $\dfrac{2x-3}{5}-\dfrac{x+1}{7}$

b. (*On suppose x non nul*) $\dfrac{x-2}{3}-\dfrac{3x-1}{2x}$

c. (*On suppose x distinct de 1 et de* $-\dfrac{1}{2}$) $\dfrac{2x+2}{2x+1}-\dfrac{x+1}{x-1}$.